Дмитрий Гурский
diis_ignotis@tut.by
Екатерина Турбина
turbina2@tut.by

Домашнее задание на ПК. Математика. Часть 1

Большинство школьников считает математику скучной и сухой дисциплиной. В чем же причины того, что лишь немногие действительно любят и понимают «царицу наук»? Главный бич математики — рутинные расчеты. Ввиду неизбежности рутины до недавнего времени достичь успеха в этой науке могли только очень усидчивые люди. Еще много веков назад человечество пыталось создать всевозможные устройства, позволявшие производить расчеты если не быстро, то хотя бы не слишком утруждая голову. Но прогресс не стоит на месте. В конце 80-х годов появились первые математические пакеты для персональных компьютеров. Одним из них стала система Mathcad от компании Mathsoft.

Mathcad может многое. Очень многое. Именно поэтому авторы выбрали эту программу как лучший инструмент, способный помочь вам в решении любой математической задачи. Огромным достоинством системы Mathcad является полное соответствие используемых в ней функций и операторов традициям оформления в математике. Главная причина, по которой стоит использовать Mathcad при изучении этой науки, заключается в том, что вы избавитесь от рутинных расчетов. Больше не придется потеть, упрощая выражения, ломать голову над сложным уравнением или неравенством, строить график при исследовании функции, мучаясь отсутствием художественных способностей. Все это Mathcad сделает за вас, причем (как правило) быстрее, точнее и красивее. Вам останется лишь правильно сформулировать задачу и проверить корректность ее решения.

Изучив все разделы данной статьи, вы сможете убедиться на конкретных примерах, что под вашим чутким руководством Mathcad может справиться с решением практически всех задач из любого раздела школьного курса математики. Статья ориентирована на читателей, имеющих элементарные навыки работы в рассматриваемом математическом пакете.

Упрощение выражений и алгебраические преобразования

Пожалуй, трудно найти более рутинную, однако и более часто встречающуюся математическую операцию, чем упрощение выражений. Практически в любом выводе промежуточный результат приходится преобразовывать в форму, более удобную для дальнейшего использования. Разложение на множители, приведение слагаемых, переход от двойного аргумента к одинарному в случае тригонометрических функций — принципы проведения всех этих операций проходят в средней школе. Однако как не хочется порой терять время на то, чтобы, к примеру, в очередной раз перемножать выражения или приводить две дроби к одному знаменателю! Значительную помощь при этом может оказать символьный процессор Mathcad. Конечно, наивно рассчитывать на то, что программа сможет без вашей помощи решать задачи уровня сборника М.И. Сканави. Однако проблемы, логически менее нагруженные, но практически сколь угодно сложные с вычислительной точки зрения ей вполне по силам. В этом разделе мы научимся эффективно использовать возможности символьного процессора в области упрощения выражений, проанализировав на примерах, какие задачи можно полностью возложить на Mathcad, а в каких требуется ваше активное участие.

Разложение выражений

Под разложением алгебраического выражения понимается математическое преобразование, переводящее степени и произведения в более простые для анализа суммы (например, $(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$). В случае разложения тригонометрических выражений функции кратного аргумента преобразуются в соответствующие им выражения от одинарного аргумента (например, $\sin(2\cdot x)=2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)$); разлагаются также функции от суммы переменных (к примеру, по формуле $\sin(x+y)=\sin(x)\cdot\cos(y)+\cos(x)\cdot\sin(y)$). При разложении логарифмических выражений используются преобразования типа $\ln(a\cdot b)=\ln(a)+\ln(b)$, $\ln(a/b)=\ln(a)-\ln(b)$, $\log_a(a^x)=x$. Для проведения разложения выражений в Mathcad существует специальный оператор expand (разложить) панели Symbolic (Символьные). В левый маркер данного оператора заносится упрощаемое выражение, в правый — переменная (или выражение), относительно которой разложение проводится. Объективно говоря, в подавляющем большинстве случаев заполнение правого маркера — это избыточная операция и проводить ее необязательно. Поэтому обычно правый маркер просто удаляют.

Пример 1. Разложение выражений различных типов

Разложение алгебраического выражения. Система перемножает выражения в числителе и производит приведение слагаемых к общему знаменателю. Затем раскрывается степень в знаменателе, после чего числитель делится на знаменатель.

$$\frac{\left(x^2+3x+1\right)\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)}{(x+1)^5}\ \text{expand}\ \rightarrow \frac{x^4+2\cdot x^2+3\cdot x^3+3\cdot x+1}{x^6+5\cdot x^5+10\cdot x^4+10\cdot x^3+5\cdot x^2+x}$$

Разложение тригонометрического выражения. Система переходит от sin(2x) и tg(3x) к функциям от x, после чего делит числитель на знаменатель.

$$\frac{\sin(2x)}{\tan(3x)}\ \text{expand}\ \rightarrow \frac{2}{3\cdot\tan(x)-\tan(x)^3}\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)-\frac{6}{3\cdot\tan(x)-\tan(x)^3}\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)\cdot\tan(x)^2$$

Разложение логарифмического выражения. Обратите внимание на то, что десятичный логарифм представляется через отношение натуральных логарифмов.

$$\frac{\log\left(b^x\right)}{\ln\left(e^b\right)}\ \text{expand}\ \rightarrow x\cdot\frac{\ln(b)}{\ln(10)\cdot b}$$

Внимательный читатель может задать вопрос: зачем у оператора expand имеется правый маркер, если то, заполнен он или нет, никак не сказывается на результате. Действительно, в большинстве случаев указывать, исходя из какой переменной (или выражения) должно производиться разложение выражения, совсем необязательно. Однако иногда то, заполнен ли правый маркер или нет, может весьма существенно сказываться на результате. Дело в том, что когда правый маркер удален, аналитический процессор пытается разложить выражение “по максимуму”, что не всегда приемлемо. Например, пусть имеется выражение вроде $(\sin(2x)+1)^3$. Если использовать оператор expand без заполнения правого маркера, то вначале система возведет выражение в третью степень, а затем перейдет от sin(2x) к функциям от x. Однако может оказаться так, что в рамках решаемой задачи нужно лишь произвести возведение в степень, не переходя от удвоенного к одинарному аргументу. В этом случае в качестве параметра разложения в правом маркере оператора expand следует указать 2x. При этом система “поймет”, что 2x должно входить в результат и не будет разлагать синус (пример 2). Описанный подход применим и к выражениям других типов. Общий принцип следующий: если выражение образовано несколькими частями и одна из его частей не должна быть разложена, то ее следует прописать в правом маркере оператора expand. При этом она будет сохранена аналитическим процессором в первоначальном виде. Также довольно тонкое различие в формате ответа при заполнении правого маркера и его удалении обнаруживается, если упрощаемое выражение является дробью. Так, если переменная разложения прописана, то система разделит числитель на знаменатель. Если же правый маркер оператора expand был удален, то никакого деления проводиться не будет.

Пример 2 Различие в результате разложения при заполнении правого маркера оператора expand и его удалении

По умолчанию оператор expand производит как возведение в степень, так и приведение тригонометрических функций к одинарному аргументу. Чтобы отменить последнюю операцию, прописываем удвоенный аргумент в правом маркере.

$$(1+\sin(2x))^3 \text{ expand } \to 1+6\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)+12\cdot\sin(x)^2\cdot\cos(x)^2+8\cdot\sin(x)^3\cdot\cos(x)^3$$

$$(1+\sin(2x))^3 \text{ expand}, 2x \to 1+3\cdot\sin(2\cdot x)+3\cdot\sin(2\cdot x)^2+\sin(2\cdot x)^3$$

Чтобы разложить лишь одну часть выражения, подлежащую сохранению, его часть указываем в правом маркере оператора expand.

$$(x+y)^2+(x+y+1)^2 \text{ expand } \to 2\cdot x^2+4\cdot x\cdot y+2\cdot y^2+2\cdot x+2\cdot y+1$$

$$(x+y)^2+(x+y+1)^2 \text{ expand}, x+y+1 \to x^2+2\cdot x\cdot y+y^2+(x+y+1)^2$$

Если правый маркер expand заполнен, то в случае выражений в виде дроби числитель будет разделен на знаменатель.

$$\frac{(x+1)^3}{(x+2)^4} \text{ expand } \to \frac{x^3+3\cdot x^2+3\cdot x+1}{x^4+8\cdot x^3+24\cdot x^2+32\cdot x+16}$$

$$\frac{(x+1)^3}{(x+2)^4} \text{ expand}, x \to \frac{1}{(x+2)^4}\cdot x^3+\frac{3}{(x+2)^4}\cdot x^2+\frac{3}{(x+2)^4}\cdot x+\frac{1}{(x+2)^4}$$

Эффективно использовать оператор expand в случае логарифмических выражений можно далеко не всегда. Причина — результат генерируется так, что в нем присутствуют только натуральные логарифмы. При этом логарифмы по другим основаниям приводятся к натуральным по формуле $log_a(x)=ln(x)/ln(a)$. Увы, но обойти этот недостаток системы невозможно. Поэтому при решении соответствующих задач просто заменяйте отношения натуральных логарифмов на нужные логарифмы по основанию *a*.

В Mathcad нет оператора, обратного expand. Имеется оператор factor, преобразующий алгебраические суммы в произведения. Он является обратным expand в случае тождеств вроде $x^2-y^2=(x-y)\cdot(x+y)$. Однако “понять”, что $2\cdot sin(x)\cdot cos(x)$ есть ни что иное, как $sin(2x)$ (или что $ln(x)+ln(y)$ тождественно равняется $ln(x\cdot y)$), ни оператор factor, ни оператор simplify не смогут. Проведение подобных преобразований — это довольно значительная проблема в Mathcad. Обычно с ней справляются банальной подстановкой формулы — и ничего лучшего пока не придумано. Пример этой операции имеется в разделе, посвященном оператору simplify.

Кстати, помимо своего прямого назначения оператор expand может быть использован в качестве своеобразного справочника математических формул по символьной алгебре (особенно тригонометрии). Например, с его помощью легко узнать, чему равняется *sin(5x)* или *cos(x+y+z)*.

Разложение на множители и приведение к общему знаменателю

Произвести разложение выражения на множители в системе Mathcad можно при помощи оператора factor (от factoring — разложение на множители). По функциям данный оператор не является полной противоположностью оператору expand. Так, при помощи оператора factor нельзя преобразовать логарифмическое или тригонометрическое выражение. Разложить на множители можно только не очень сложное алгебраическое выражение. Особенностью использования оператора factor является то, что он содержит лишний правый маркер. Если вам требуется произвести разложение выражения на множители, этот маркер нужно стереть. Иначе, если аналогично оператору expand в правый маркер ввести имя переменной (или выражение), по которой должно вестись разложение, даже в самом простом случае результат не будет получен.

При разложении алгебраического выражения на множители в качестве таковых могут выступать не только линейные множители, но и полиномы более низкой степени, чем у исходного выражения. Разложение на множители с использованием оператора factor может быть проведено и в том случае, если в выражения входят специальные функции (см. третье преобразование в примере 3).

Пример 3. Разложение многочленов на множители

$$x^3 - 1 \text{ factor } \rightarrow (x-1)\cdot\left(x^2 + x + 1\right)$$

$$x^4 - 10\cdot x^3 + 35\cdot x^2 - 50\cdot x + 24 \text{ factor } \rightarrow (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)$$

$$\sin(x)^2 - \cos(x)^2 \text{ factor } \rightarrow -(\cos(x) - \sin(x))\cdot(\cos(x) + \sin(x))$$

$$x^2 + 2x\cdot y + 2x\cdot z + y^2 + 2y\cdot z + z^2 \text{ factor } \rightarrow (x + y + z)^2$$

Второй по важности задачей, для решения которой используется оператор factor, является разложение целых чисел на простые множители. Эта возможность символьного процессора активно применяется при поиске корней полиномов, а также упрощении выражений.

Пример 4. Определить, является ли число 11^{11}+13 простым

$$11^{11} + 13 \text{ factor } \rightarrow 2^5\cdot 3^4\cdot 197\cdot 293\cdot 1907$$

Вывод: Данное число простым не является, так как его можно получить перемножением пяти различных чисел.

Довольно интересной возможностью оператора factor является преобразование десятичных дробей в дроби простые. Естественно, что такая операция возможна лишь в случае отдельных десятичных дробей. Самое важное требование — дробь должна быть конечной (например, 0,25, но не 0,3333333333…). Описанную возможность можно использовать для приведения выражения в более простую для аналитического процессора форму (простые дроби он “понимает” лучше, чем десятичные).

Пример 5. Преобразование десятичных дробей в обыкновенные

$$0.125 \text{ factor } \rightarrow \frac{1}{8} \qquad 1.674 \text{ factor } \rightarrow \frac{837}{500}$$

Очень важной для практики операцией, для проведения которой используется оператор factor, является приведение к общему знаменателю выражения из двух или более дробей. Причем в числитель и знаменатель дробей могут входить совершенно любые функции и их сочетания. Приведение к общему знаменателю — это один из основных ходов, применяемых при упрощении выражений.

Пример 6. Приведение дробей к общему знаменателю.

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+y} \text{ factor } \rightarrow \frac{x^3 + x^2\cdot y + 2\cdot x^2 + x\cdot y + x + y}{x^2\cdot(x+y)}$$

В задачниках для поступающих в вузы довольно часто встречаются задачи, в которых требуется так преобразовать арифметическое выражение, чтобы в знаменателе исчезла иррациональность (то есть все корни нужно перенести в числитель). Задачи такого рода требуют весьма значительных выкладок, однако оператор factor справляется с ними с легкостью.

Пример 7. Избавиться от иррациональности в знаменателе арифметического выражения

Вынесение общего множителя за скобку

Вынести общий множитель за скобку в выражении можно при помощи символьного оператора collect (собрать). Определить, по какой переменной нужно производить данное преобразование, можно, введя ее имя в правый маркер оператора. Вынесение общего множителя может быть осуществлено как по одной, так и по нескольким переменным. В последнем случае имена переменных нужно указать через запятую в маркере оператора collect в той последовательности, в которой они должны быть вынесены за скобку. В случае дробных выражений вынесение за скобку общего множителя будет проводиться как в числителе, так и в знаменателе. Если слагаемые должны быть распределены по нескольким группам, то выражение придется разделить на части и оперировать с каждой из них по отдельности (или, что вероятнее всего, выполнить эту работу придется самостоятельно). Также нельзя вынести за скобку произведение двух переменных. В выражениях, содержащих функции, вынести общий множитель за скобку можно, прописав нужную функцию в правом маркере оператора collect. Если же необходимо вынести за скобку несколько множителей-функций, их, как и в случае переменных, необходимо последовательно прописать через запятую в маркере оператора collect.

Оператор collect объединяет в одну группу члены, в которые переменная, по которой проводится преобразование, входит в одинаковой степени. Поэтому, например, выражение x^2+x+1 не будет представлено им как $x\cdot(x+1)+1$. Вообще же группировка членов многочлена “лучшим образом” — это чрезвычайно нагруженная интеллектуально задача. Поэтому оператор collect, вообще говоря, довольно редко используется на практике. Из-за того что нельзя указать, какое именно выражение должно быть вынесено за скобку, он малополезен для большинства задач. Увы, их пока придется решать на бумаге.

Пример 8. Вынесение общего множителя за скобку

$$x^3\cdot y^2\cdot z^3 + x^3\cdot y^2\cdot z^2 + x^2\cdot y^3\cdot z^2 + x^2\cdot y^2\cdot z^2 \text{ collect}, x \rightarrow \left(y^2\cdot z^3 + y^2\cdot z^2\right)\cdot x^3 + \left(y^3\cdot z^2 + y^2\cdot z^2\right)\cdot x^2$$

$$x^3\cdot y^2\cdot z^3 + x^3\cdot y^2\cdot z^2 + x^2\cdot y^3\cdot z^2 + x^2\cdot y^2\cdot z^2 \text{ collect}, y, x, z \rightarrow x^2\cdot y^3\cdot z^2 + \left[\left(z^3 + z^2\right)\cdot x^3 + x^2\cdot z^2\right]\cdot y^2$$

$$\sin(x)\cos(x)^2 + \sin(x) \text{ collect}, \sin(x) \rightarrow \left(\cos(x)^2 + 1\right)\cdot\sin(x)$$

$$2x^2 e^x \cos(x) + 5e^x \sin(x) + 3x\cdot e^x\cdot\cos(x) - \frac{e^x}{x}\cdot\sin(x) \text{ collect}, \cos(x), \sin(x), e^x \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(2\cdot x^2 + 3\cdot x\right)\cdot e^x\cdot\cos(x) + \left(5 - \frac{1}{x}\right)\cdot e^x\cdot\sin(x)$$

Разложение на элементарные дроби

Одной из самых объемных и трудных в вычислительном плане задач символьной алгебры является разложение какого-то сложного дробного выражения на более простые, в идеале — линейные, дроби. Разложение на элементарные дроби — это одна из основных операций, использующихся при упрощении выражений.

В Mathcad имеется специальный символьный оператор convert,parfac (от английского “Convert to Partial Fraction” — “Разложить на элементарные дроби”), проводящий рассматриваемую операцию. Вводится он нажатием кнопки parfac панели Symbolic (Символьные). В его левом маркере прописывается подлежащее преобразованию выражение, в правом — переменная, исходя из которой преобразование должно проводиться (программа не может различить переменную и параметры самостоятельно).

Обычно на элементарные дроби раскладывается выражение, представляющее собой отношение полиномов. Однако можно разложить и выражение, в качестве переменных полинома в котором выступают функции (см. третье преобразование в примере 9).

Пример 9. Разложение на элементарные дроби выражений различных типов

$$\frac{x^2+5}{x^3-3x+2} \text{ convert, parfrac}, x \rightarrow \frac{1}{x+2}+\frac{2}{(x-1)^2}$$

$$\frac{-3x^2+(2\cdot b+2a+2c)\cdot x-b\cdot c-a\cdot b-a\cdot c}{x^3+(-a-b-c)\cdot x^2+(b\cdot c+a\cdot b+a\cdot c)x-a\cdot b\cdot c} \text{ convert, parfrac}, x \rightarrow \frac{-1}{x-a}-\frac{1}{x-c}-\frac{1}{x-b}$$

$$\frac{\cos(x)+2\cdot\sin(x)}{\sin(x)\cdot(\cos(x)+\sin(x))} \text{ convert, parfrac}, \sin(x) \rightarrow \frac{1}{\sin(x)}+\frac{1}{\cos(x)+\sin(x)}$$

Выполнение подстановки и замены переменных

Очень часто при символьных расчетах возникают ситуации, требующие замены переменной в выражении на другую переменную или некоторое выражение. Например, замена может понадобиться для упрощения вида выражения или уменьшения его размеров. Наиболее просто подстановку можно осуществить, воспользовавшись специальным символьным оператором substitute (Заместить). Для этого проделайте следующую последовательность действий.

1. Нажав соответствующую команду панели Symbolic (Символика), введите оператор substitute (Заместить).
2. В левый маркер оператора внесите выражение или его имя.
3. В правом маркере сделайте запись вида a=b, где a — замещаемая переменная, b — подставляемое значение. Если заместить нужно две переменные, то через запятую делается еще одно аналогичное присваивание. В качестве знака равенства в данном случае следует использовать логическое равенство (Bold Equal — <Ctrl>+=).

Оператор substitute позволяет замещать не только переменные, но и функции, и даже целые выражения. Например, чтобы заместить sin(x) на t, в правом маркере оператора substitute достаточно набрать “sin(x)=t”.

Пример 10. Упрощение выражения с подстановкой

Задача: упростить выражение вида

$$\frac{1-b}{\sqrt{b}}\cdot x^2-2x+\sqrt{b}$$

при условии, что

$$x=\frac{\sqrt{b}}{1-\sqrt{b}}$$

Решение: выполняем подстановку выражения для x при помощи оператора substitute, а затем упрощаем выражение с использованием оператора simplify.

$$\frac{1-b}{\sqrt{b}}\cdot x^2-2x+\sqrt{b} \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, \ x=\dfrac{\sqrt{b}}{1-\sqrt{b}} \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow 0$$

При проведении аналитических преобразований операция подстановки весьма востребована. То, насколько эффективно символьный процессор будет проводить операции вроде разложения на множители или поиска корней, очень сильно зависит от вида выражения. Так, если в нем есть корни, то система здесь работает неважно. Однако, выполнив такую замену, чтобы корни исчезли, эффективность работы аналитического процессора можно резко повысить. Сильно упрощенный пример, демонстрирующий описанный подход, приведен ниже. С более реалистичными примерами мы встретимся в следующем разделе.

Пример 11. Приведение выражения к более простому виду посредством замены переменных

Если попытаться разложить выражение в его первоначальном виде, то должного упрощения произведено не будет.

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y} \text{ expand } \rightarrow \frac{1}{x-y}\cdot x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{x-y}\cdot y^{\frac{1}{2}}$$

Символьный процессор плохо справляется с выражениями с корнями, поэтому нужно осуществить такую подстановку, чтобы корни исчезли.

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y} \text{ substitute }, \sqrt{x}=m, \sqrt{y}=n, x=m^2, y=n^2 \rightarrow \frac{m+n}{m^2-n^2}$$

Теперь выражение будет разложено так, как надо.

$$\frac{m+n}{m^2-n^2} \text{ expand } \rightarrow \frac{-1}{n-m}$$

Выполняем обратную подстановку, получая окончательный ответ.

$$\frac{1}{m-n} \text{ substitute }, m=\sqrt{x}, n=\sqrt{y} \rightarrow \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}$$

Комплексное упрощение выражений

На практике упрощение выражений редко сводится к проведению операций какого-то одного рода. Чаще для того, чтобы преобразовать выражение в более простую форму, требуется задействовать несколько операций. Например, над результатом символьного дифференцирования может понадобиться вначале провести операцию приведения к подобным слагаемым, а уж затем попытаться вынести общие множители за скобку. Упрощение, для осуществления которого нужно провести несколько операций различного рода, мы будем называть комплексным. В простейших случаях аналитический процессор Mathcad способен проводить комплексное упрощение выражений. Служит для этого специальный символьный оператор simplify (Упростить).

По большому счету, возможности оператора simplify представляют собой частичную сумму возможностей остальных операторов алгебраических преобразований. Он может, подобно оператору expand, проводить разложение выражений. Аналогично оператору factor simplify, может осуществить приведение двух дробей к общему знаменателю. Как и collect simplify, способен вынести общий множитель за скобку. Кроме того, simplify “умеет” приводить подобные слагаемые и производить арифметические расчеты. Главное же — рассматриваемый оператор способен совмещать все эти операции так, чтобы упрощение было максимальным.

Пример 12. Упрощение выражений

$$\frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2} \text{ simplify } \rightarrow \frac{x^2 + x \cdot y + y^2}{x + y}$$

$$\frac{x^2 - 2a \cdot x + a^2}{x^2 - (a+3) \cdot x + 3 \cdot a} \text{ simplify } \rightarrow \frac{x - a}{x - 3} \qquad e^{\ln\left(\frac{x-y}{x^2-y^2}\right)} \text{ simplify } \rightarrow \frac{1}{x + y}$$

Очень часто глубина упрощения выражения и результат этой операции зависят от того, какие значения могут принимать входящие в выражения величины. Довольно интересный результат будет получен при попытке извлечь корень из квадрата переменной:

$$\sqrt{x^2} \text{ simplify } \rightarrow \operatorname{csgn}(x) \cdot x$$

По умолчанию Mathcad все неизвестные рассматривает как комплексные числа. Что такое комплексные числа, рассматривается в курсе высшей математики в вузе. Мы же скажем о них два слова для общего представления. Так, например, из школьного курса математики вы четко усвоили, что нельзя извлечь квадратный корень (или корень любой четной степени) из отрицательного числа, а квадратное уравнение, дискриминант которого меньше нуля, не имеет корней. На самом деле квадратным корнем из отрицательного числа является так называемое комплексное число. Оно состоит из действительной и мнимой части и в общем виде записывается как $a \cdot i + b$, где $a \cdot i$ — мнимая, b — действительная части. a и b — это любые действительные числа, i — мнимая единица, ее квадрат равен −1 ($i^2 = -1$, или i равна корню из −1). Что касается квадратных уравнений, то независимо от величины дискриминанта они всегда имеют два корня, просто в случае, когда $D<0$, корни являются комплексными числами. Кстати, подумаете, ведь любое действительное число можно представить как комплексное, где $a=0$. Именно так и поступает Mathcad. Надеемся, что в дальнейшем у вас не возникнет сложностей с пониманием результатов, полученных Mathcad, которые содержат мнимую единицу i.

Вернемся к последнему выражению. Функция csgn — это функция знака комплексного числа. Хотя полученный ответ вполне корректен при предположении, что x — это комплексное число, в подавляющем большинстве случаев он неприемлем. Необходимо как-то указать аналитическому процессору, что x следует рассматривать как действительное число. Сделать это позволяет символьный оператор assume (принимает).

Оператор assume имеет два маркера. В левый вводится оператор, результат работы которого должен быть получен исходя из некоторого условия (в нашем случае это будет оператор simplify). В правом маркере определяется само условие.

Условие может быть ограничивающим либо область определения переменной, либо ее тип. Ввести ограничения на область можно при помощи логических операторов панели Boolean (Булевы). Для того же, чтобы задать тип переменной или параметра, нужно обратиться к панели специальных ключевых слов Modifier (Модификация) панели Symbolic (Символьные).

Панель Modifier содержит четыре ключевых слова. Вводить их можно и просто набором с клавиатуры.

- assume (принимает). Слово-заготовка для создания оператора модификации.
- real (действительное). При использовании этого служебного слова система будет воспринимать переменную как действительную.
- RealRange(a,b) (Действительная область). При помощи этого оператора вы можете ограничить область изменения переменной или константы отрезком между действительными числами a и b. Обратите внимание на то, что при вызове данного оператора с панели Modifier его название начинается со строчной буквы. Поскольку Mathcad чувствителен к регистру, следует вручную заменить строчные буквы «r» в названии оператора на прописные «R» так, чтобы его вид соответствовал изображенному на панели Modifier. Легче же всего просто ввести данный оператор с клавиатуры.

- trig (тригонометрические). Параметр или переменная рассматривается как тригонометрическая величина. На практике используется редко, так как реально практически ни на что не влияет.

Итак, попробуем найти корень из квадрата переменной, указав, что она принимает только действительные значения:

$$\sqrt{x^2}\ \left|\begin{array}{l}\text{assume},\ x = \text{real}\\ \text{simplify}\end{array}\right. \rightarrow \text{signum}(x)\cdot x$$

Функция signum является функцией знака действительного числа. Она возвращает -1, если число отрицательно, 1, если оно положительно, и 0, если оно равняется 0. Нетрудно заметить, что signum(x)·x есть ничто иное, как модуль x.

Если известно, что переменная может быть только положительной или только отрицательной, можно придти к еще более простому результату. Для этого область изменения x должна быть указана в правом маркере оператора assume при помощи соответствующих неравенств:

$$\sqrt{x^2}\ \left|\begin{array}{l}\text{assume},\ x \ge 0\\ \text{simplify}\end{array}\right. \rightarrow x \qquad \sqrt{x^2}\ \left|\begin{array}{l}\text{assume},\ x < 0\\ \text{simplify}\end{array}\right. \rightarrow -x$$

Если переменная изменяется в какой-то ограниченной области, то наиболее эффективно использовать модификатор RealRange:

$$\sqrt{x^2}\ \left|\begin{array}{l}\text{assume},\ \ x = \text{RealRange}(3,5)\\ \text{simplify}\end{array}\right. \rightarrow x$$

Не забывайте использовать оператор assume в тех случаях, в которых результат упрощения зависит от значения переменной (это прежде всего выражения с корнем, а также некоторые логарифмические выражения и выражения с модулем). Помимо оператора simplify оператор assume часто применяется с операторами взятия определенного и неопределенного интегралов.

Пожалуй, по логической нагруженности оператор simplify занимает первое место среди остальных символьных операторов. Действительно, ведь зачастую очень трудно четко определить, какое из двух выражений более простое, а следовательно, и задаться верным направлением в упрощении. Например, какое выражение проще *sin(2x)* или *2sin(x)·cos(x)*? Очевидно, что ответ зависит только от особенностей решаемой задачи. Но Mathcad эти особенности не известны! И это, увы, не может не сказываться на качестве работы оператора simplify: упростить в Mathcad можно лишь наиболее простые, как правило, алгебраические или логарифмические выражения. Так, из 10 первых примеров по данной теме из известного задачника Сканави оператором simplify правильно не был упрощен ни один! А ведь это совсем несложные задачи, которые решают школьники в 8 классе. И если алгебраические выражения хотя бы в наиболее простых случаях могут быть упрощены оператором simplify успешно, то тригонометрическое выражение не будет правильно преобразовано почти наверняка (в лучшем случае система ограничится приведением подобных и упрощением исходя из основного тригонометрического равенства $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$). Эффективность упрощения алгебраических выражений очень сильно зависит от того, есть ли в них корни, и каким образом они заданы. Выражения, содержащие корни, упрощаются очень плохо, даже если и имеют простой вид.

Пример 13. Неэффективное упрощение выражений

$$\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}\ \text{simplify}\ \rightarrow \frac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x-1}$$

Неверно. Правильный ответ — $\frac{1}{\sqrt{x}-1}$.

$$\frac{\sin(2x)}{2\cdot\cos(x)}\ \text{simplify}\ \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(2\cdot x)}{\cos(x)}$$

Неверно. Правильный ответ — sin(x).

Глядя на приведенные примеры, трудно не согласиться с утверждением, что операция символьного упрощения выражений — это одно из самых слабых мест системы Mathcad. Впрочем, для этого есть вполне объективные и пока трудно разрешимые причины (увы, но компьютеры не умеют мыслить — они лишь очень быстро считают). Поэтому не стоит требовать от программы невозможное, и если вам понадобится решить пример из того же задачника Сканави, пока вам придется сделать это самостоятельно. Вернее, самостоятельно вам придется продумать стратегию упрощения. Mathcad же выполнит за вас вычислительную работу. Продемонстрируем данный подход на примере.

Пример 14. Упрощение сложного алгебраического выражения

Пусть нам необходимо упростить громоздкое алгебраическое выражение вида

$$\frac{\left(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n}\right)^2+\left(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n}\right)^2}{2\cdot(m-n)} \div \frac{1}{\sqrt{m^3}-\sqrt{n^3}} - 3\cdot\sqrt{m\cdot n}$$

Оперировать столь большим выражением довольно непросто. Поэтому разделим его на три части и будем проводить упрощение поэтапно. Очевидно, что в первую очередь нужно раскрыть квадраты в числителе первой части выражения:

$$\left(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n}\right)^2+\left(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n}\right)^2\ \text{expand}\ \rightarrow 2\cdot m^{\frac{1}{2}}+2\cdot n^{\frac{1}{2}}$$

Раскрыв квадраты в числителе, обнаруживаем, что полученная дробь может быть довольно легко упрощена. Однако оператор simplify "не ладит" с корнями и дробными степенями. Поэтому, чтобы от них избавиться, выполним замену $m=x^2$, $n=y^2$. Чтобы в ответе "не всплыли" функции csgn и signum, указываем, что x и y могут быть только положительными (это соответствует истине, так как в исходном выражении имеются корни четвертой степени из m и n).

$$\frac{2\cdot m^{\frac{1}{2}}+2\cdot n^{\frac{1}{2}}}{2(m-n)}\ \left|\begin{array}{l}\text{substitute}, m=x^2, n=y^2\\ \text{assume}, x\ge 0, y\ge 0\\ \text{simplify}\end{array}\right. \rightarrow \frac{1}{x-y}$$

Заменяем m и n на x и y во второй части исходного выражения, а затем упрощаем его совместно с преобразованной первой частью:

$$\frac{1}{\sqrt{m^3}-\sqrt{n^3}} \;\text{substitute}, m=x^2, n=y^2 \;\rightarrow \frac{1}{\left(x^6\right)^{\frac{1}{2}}-\left(y^6\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{1}{x-y} \div \frac{1}{\left(x^6\right)^{\frac{1}{2}}-\left(y^6\right)^{\frac{1}{2}}} \;\left|\begin{array}{l}\text{assume}, x \ge 0, y \ge 0\\ \text{simplify}\end{array}\right. \rightarrow x^2 + x\cdot y + y^2$$

Выполнив замену, подставляем в выражение третью часть и проводим упрощение:

$$x^2 + x\cdot y + y^2 - 3\sqrt{m\cdot n} \;\left|\begin{array}{l}\text{substitute}, m=x^2, n=y^2\\ \text{assume}, x \ge 0, y \ge 0\\ \text{simplify}\end{array}\right. \rightarrow x^2 - 2\cdot x\cdot y + y^2$$

Разлагаем полученное выражение на множители и возвращаемся к исходным переменным:

$$x^2 - 2\cdot x\cdot y + y^2 \;\left|\begin{array}{l}\text{factor}\\ \text{substitute}, x=\sqrt{m}, y=\sqrt{n}\end{array}\right. \rightarrow \left(m^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

Выражения, содержащие функции (логарифмы, тригонометрические), обычно упрощаются довольно плохо. Однако очень часто эффективность упрощения можно резко увеличить, сведя посредством замен выражение к чисто алгебраическому виду. Максимально упростив его алгебраическими приемами, уже будет проще действовать, опираясь на специфические свойства входящих в него функций. Для примера покажем, как можно с помощью Mathcad упростить логарифмическое выражение.

При упрощении логарифмических выражений возникают две сложности. Во-первых, для задания логарифма от x по основанию a в Mathcad служит функция log(a,x). Однако в математике такие логарифмы принято обозначать с использованием нижнего индекса: $\log_a(x)$. Если вид решения важен, то можно создать собственную функцию логарифма по некоторому основанию. Единственная тонкость заключается здесь в том, как ввести в имя нижний индекс. А сделать это очень просто, нажав кнопку <.> (точка). Во-вторых, зачастую символьный процессор выдает неприемлемый результат по причине того, что все логарифмы он преобразует в отношения натуральных. Избежать этого никак нельзя. Поэтому, если в ответ должны входить десятичные логарифмы или логарифмы по основанию a, то соответствующее преобразование ответа придется проделать самостоятельно.

Пример 15. Упрощение логарифмических выражений

Пусть нам необходимо упростить логарифмическое выражение следующего вида:

$$\sqrt{\left(\sqrt{\log_b(a)^4 + \log_a(b)^4 + 2}\right) + 2} - \log_b(a) - \log_a(b)$$

Чтобы задать его в Mathcad в традиционном представлении, делаем следующие определения:

$$\log_a(x) := \log(x, a) \qquad \log_b(x) := \log(x, b)$$

Созданные пользовательские функции используем в выражении.

Для начала данное выражение должно быть преобразовано, как алгебраическое. Для этого введем замену $t=\log_b(a)$. Очевидно, что тогда $\log_a(b)=1/t$. В итоге получим алгебраический аналог упрощаемого выражения, с которым без проблем "справится" оператор simplify:

$$\sqrt{\sqrt{t^4+\frac{1}{t^4}+2}+2}-t-\frac{1}{t}\ \left|\begin{array}{l}\text{assume}, t=\text{real}\\ \text{simplify}\end{array}\right. \rightarrow \frac{\text{signum}(t)\cdot t^2+\text{signum}(t)-t^2-1}{t}$$

Обратите внимание на то, что для того чтобы символьный процессор смог провести упрощение, необходимо указать, что t принимает действительные значения. Иначе выражение упрощено не будет.

Полученное выражение зависит от знака t. В зависимости от того, положителен t или нет, дальнейшее упрощение даст разный результат. Для положительных значений t (то есть для $a>1$ при $b>1$ и $a<1$ при $b<1$):

$$\frac{\text{signum}(t)\cdot t^2+\text{signum}(t)-t^2-1}{t}\ \left|\begin{array}{l}\text{assume}, t>0\\ \text{simplify}\end{array}\right. \rightarrow 0$$

Для отрицательных значений t (то есть для $a<1$ при $b>1$ и $a>1$ при $b<1$):

$$\frac{\text{signum}(t)\cdot t^2+\text{signum}(t)-t^2-1}{t}\ \left|\begin{array}{l}\text{assume}, t<0\\ \text{simplify}\end{array}\right. \rightarrow -2\cdot\frac{t^2+1}{t}$$

Во втором выражении делаем обратную подстановку $t=\log_b(a)$:

$$-2\cdot\frac{t^2+1}{t}\ \left|\begin{array}{l}\text{substitute}, t=\log_b(a)\\ \text{expand}\end{array}\right. \rightarrow -2\cdot\frac{\ln(a)}{\ln(b)}-\frac{2}{\ln(a)}\cdot\ln(b)$$

Учитывая, что $\ln(m)/\ln(n)=\log_n(m)$, преобразуем ответ так, чтобы в нем присутствовали те же логарифмы, что и в исходном выражении:

$$-2\left(\log_b(a)+\log_a(b)\right)$$

Mathcad может помочь в упрощении и тригонометрических выражений. Символьный процессор умеет приводить подобные слагаемые, раскладывать функции от суммы переменных, переходит от функций кратного аргумента к функциям аргумента одинарного. Однако упрощения вроде $2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)=\sin(2x)$ или $\sin(x)\cdot\cos(y)+\cos(x)\cdot\sin(y)=\sin(x+y)$ оператор simplify никогда не осуществляет. Подобные преобразования вы должны проводить самостоятельно. Вообще, главное условие эффективного использования аналитического процессора Mathcad — это четкое понимание того, в чем он может помочь, а что нужно делать "вручную". Пример упрощения тригонометрического выражения совместными силами Mathcad и человека приведен ниже.

Пример 16. Упрощение тригонометрического выражения

Пусть нам необходимо упростить следующее тригонометрическое выражение:

$$\cos(2\cdot\alpha)-\sin(4\cdot\alpha)-\cos(6\cdot\alpha)$$

Условие упрощения: итоговое выражение должно представлять собой произведение тригонометрических функций.

Для начала нужно привести входящие в выражение функции к одному аргументу — 2α:

$$\cos(2\alpha)-\sin(4\alpha)-\cos(6\alpha)\ \text{simplify} \rightarrow 4\cdot\cos(2\cdot\alpha)-2\cdot\sin(2\cdot\alpha)\cdot\cos(2\cdot\alpha)-4\cdot\cos(2\cdot\alpha)^3$$

Исходя из условия упрощения, следующим этапом логично будет сделать разложение на множители:

$$4\cdot\cos(2\cdot\alpha) - 2\cdot\sin(2\cdot\alpha)\cdot\cos(2\cdot\alpha) - 4\cdot\cos(2\cdot\alpha)^3 \text{ factor } \rightarrow$$
$$\rightarrow -2\cdot\cos(2\cdot\alpha)\cdot\left(-2 + \sin(2\cdot\alpha) + 2\cdot\cos(2\cdot\alpha)^2\right)$$

Чтобы упростить выражение в скобках, косинус следует заменить синусом, а затем выполнить разложение на множители:

$$-2 + \sin(2\cdot\alpha) + 2\cdot\cos(2\cdot\alpha)^2 \text{ substitute}, \cos(2\alpha)^2 = 1 - \sin(2\alpha)^2 \rightarrow \sin(2\cdot\alpha) - 2\cdot\sin(2\cdot\alpha)^2$$

$$\sin(2\cdot\alpha) - 2\cdot\sin(2\cdot\alpha)^2 \text{ factor } \rightarrow -\sin(2\cdot\alpha)\cdot(-1 + 2\cdot\sin(2\cdot\alpha))$$

В итоге получим следующее выражение:

$$2\cdot\cos(2\cdot\alpha)\cdot\sin(2\cdot\alpha)\cdot(-1 + 2\cdot\sin(2\cdot\alpha))$$

С учетом того, что $2\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)=\sin(2\cdot\alpha)$, выражение можно немного упростить:

$$\sin(4\alpha)\cdot((-1 + 2\cdot\sin(2\cdot\alpha))$$

Чтобы преобразовать сумму в скобках в произведение, осуществим следующие тождественные преобразования:

$$-1 + 2\cdot\sin(2\cdot\alpha) = 2\left(\sin(2\alpha) - \frac{1}{2}\right) = 2\cdot\left(\sin(2\alpha) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

Формулу преобразования разности синусов в произведение тригонометрических функций можно найти в любом справочнике:

$$2\cdot\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \text{ substitute}, x=2\alpha, y=\frac{\pi}{6} \rightarrow 2\cdot\cos\left(\alpha + \frac{1}{12}\cdot\pi\right)\cdot\sin\left(\alpha - \frac{1}{12}\cdot\pi\right)$$

Окончательно имеем:

$$4\sin(4\alpha)\cdot\left(\cos\left(\frac{1}{12}\cdot\pi + \alpha\right)\cdot\sin\left(\alpha - \frac{1}{12}\cdot\pi\right)\right)$$

При помощи оператора simplify можно упрощать значения численных выражений. При этом если какое-нибудь число в выражении содержит десятичную точку, то ответ будет также найден в виде десятичной дроби. Чтобы этого не произошло, все десятичные дроби нужно перевести в обыкновенные с использованием оператора factor.

Пример 17. Упрощение численного выражения

Если в выражение входит десятичная дробь, расчет будет произведен приблизительно:

$$\frac{2^{-2} + 5^0}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - 5\cdot(-2)^{-2} + \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} + \sqrt{2}} + 4.35 \text{ simplify } \rightarrow 4.4700282664181472302$$

Чтобы получить ответ в аналитическом виде, переводим десятичные дроби в простые:

$$4.35 \text{ factor } \rightarrow \frac{87}{20}$$

$$\frac{2^{-2}+5^{0}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}-5\cdot(-2)^{-2}+\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}+\sqrt{2}}+\frac{87}{20} \text{ simplify } \rightarrow \frac{1}{20}\cdot\frac{808+87\cdot 2^{\frac{1}{2}}}{9+2^{\frac{1}{2}}}$$

Решение уравнений и систем уравнений

В данном разделе мы рассмотрим способы символьного решения уравнений и их систем.

Для аналитического решения уравнений в системе Mathcad существует специальный оператор solve (решить). Для того чтобы найти с его использованием корни уравнения, выполните следующую последовательность действий:

1. Введите оператор solve (решить) при помощи одноименной команды панели Symbolic (Символьные).
2. В левом маркере задайте вид решаемого уравнения. В качестве знака равенства следует использовать логическое равенство (Bold Equal — вводится сочетанием <Ctrl>+=). Если уравнение приведено к стандартному виду, то достаточно будет определить лишь его левую часть. При этом выражение будет приравнено к нулю автоматически. Также в левый маркер можно внести и имя функции — в этом случае будут найдены выражения, определяющие ее нули. Форма записи уравнения через функцию удобна в том случае, если оно имеет большую длину.
3. В правый маркер внесите переменную, относительно которой должно быть решено уравнение.

Ответ оператор solve возвращает в виде выражения (численного или буквенного), которое вполне можно использовать в дальнейших вычислениях. Если решений имеется несколько, то возвращаются в скобках.

При символьном решении уравнений нет особой разницы, сколько переменных содержит уравнение. Ответ ищется в виде выражения, и поэтому для системы неважно, будет ли оно содержать буквенные или численные элементы. Исходя из этого вы можете найти корни как уравнения нескольких переменных, так и уравнения с параметрами или буквенными коэффициентами.

Рассмотрим особенности решения каждого из типов уравнений, встречающихся на практике.

Лучше всего Mathcad справляется с поиском корней алгебраических полиномов. Причем находятся все корни — как действительные, так и мнимые. Общее их число, исходя из знаменитой теоремы алгебры (теорема Гаусса), равняется n, где n — степень полинома. Например, в случае полинома третьей степени мы получим три решения.

Пример 18. Поиск всех решений уравнения, являющегося алгебраическим полиномом

$$(x+1)\cdot\left(x^2+2\right)+(x+2)\cdot\left(x^2+1\right)=2 \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{-1}{4}+\frac{1}{4}\cdot i\cdot 15^{\frac{1}{2}} \\ \frac{-1}{4}-\frac{1}{4}\cdot i\cdot 15^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

На практике обычно бывает необходимо найти только действительные корни полинома. Увы, указать Mathcad, что поиск решений должен быть осуществлен только в пределах действительной области, невозможно. Бессмысленно для этого пытаться использовать оператор assume (подробно о нем читайте в предыдущем разделе), присвоив переменной константу real или задав область поиска от −∞ до ∞ посредством модификатора RealRange. Дело в том, что операторы assume и solve не сочетаются — при попытке их совместить solve прекратит работу. Это одна из самых известных недоработок системы Mathcad — и обойти ее невозможно. Так что, если комплексные корни вас не интересуют, просто не обращайте на них внимания.

Без особых трудностей справляется Mathcad и с алгебраическими уравнениями более сложного вида, содержащими разного рода корни. Главная проблема, которая при этом может возникнуть, — это чрезвычайно большие выражения ответа, которые могут занимать несколько страниц и не поддаваться оптимизации посредством оператора simplify. Если вы столкнетесь с такой сложностью, то переведите ответ в десятичную дробь с нужным уровнем точности. Служит для этого оператор float (или аналогичная команда меню Symbolics), принимающий в качестве параметра количество знаков мантиссы, которые должны быть вычислены (предел точности — 4000 знаков мантиссы).

Пример 19. Решение алгебраических уравнений сложного вида

$$\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4 \text{ solve}, x \rightarrow 0$$

Ответ в следующем уравнении получается слишком громоздким, поэтому пересчитываем его в десятичную дробь с точностью до 40 знаков

$$\frac{1}{x+\sqrt{x+2}}=\sqrt{x+2}+1 \left|\begin{array}{l} \text{solve}, x \\ \text{float}, 40 \end{array}\right. \rightarrow -.6823278038280193273694837397110482568 9$$

В некоторых случаях ответ может получаться столь большим, что его отображение станет невозможным. При этом будет выдано сообщение об ошибке “Discarding huge result”— “Выбраковка огромного результата”, а сам результат будет помещен в текстовой форме в буфер обмена. Однако как-то воспользоваться им будет практически невозможно. Поэтому, если подобная ситуация возникнет, нужно пересчитать ответ в десятичную дробь при помощи оператора float.

Для решения уравнений оператором solve проводятся аналитические преобразования, по причине чего зачастую корни можно найти в общем виде (то есть выразить их через буквенные коэффициенты). Аналогично solve справится с несложными уравнениями с параметрами. Эта его возможность особенно полезна при решении физических и технических задач, так как в соответствующие уравнения обычно входят многочисленные константы.

Пример 20. Решение уравнения с параметром

$$a\cdot x^4 - x^3 + a^2\cdot x - a \text{ solve}, x \rightarrow \begin{bmatrix} (-a)^{\frac{1}{3}} \\ \frac{-1}{2}\cdot(-a)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}\cdot i\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot(-a)^{\frac{1}{3}} \\ \frac{-1}{2}\cdot(-a)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\cdot i\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot(-a)^{\frac{1}{3}} \\ \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

Весьма неплохо, хотя и заметно хуже по сравнению с алгебраическими уравнениями справляется символьный процессор с показательными и логарифмическими уравнениями. Для решения логарифмических уравнений нужно запомнить, что натуральный логарифм задается функцией ln, десятичный — функцией log. Для задания логарифма по основанию x также служит функция log. Однако в этом случае она принимает два параметра: первый соответствует величине, от которой нужно найти логарифм, второй предназначен для указания основания.

Решая логарифмическое или показательное уравнение, ответ оператор solve обычно выдает в виде сложного выражения из чисел и логарифмов от чисел. Чтобы привести его к более простому виду, следует использовать оператор simplify.

Пример 21. Решение логарифмических и показательных уравнений

$$\log\left(9 - 2^x, 2\right) = 10^{\log(3-x)} \left| \begin{array}{l} \text{solve}, x \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow 0$$

$$7^x\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{2x^2-6} - \left(\frac{7}{4}\right)^x = 0 \left| \begin{array}{l} \text{solve}, x \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ответ для нижележащего уравнения определяется в неявной форме, однако с легкостью можно подсчитать его приблизительное значение:

$$\frac{2\cdot x + 10}{4} = \frac{8}{2^{x-2}} \text{ solve}, x \rightarrow \frac{-5\cdot\ln(2) + W(2048\cdot\ln(2))}{\ln(2)}$$

$$\frac{-5\cdot\ln(2) + W(2048\cdot\ln(2))}{\ln(2)} \text{ float } \rightarrow 3.0000000000000000$$

Специальные функции (в нашем случае в ответе появилась функция W) могут быть получены в ответах не только при аналитическом решении уравнений, но при проведении интегрирования. В любом случае для приведения ответа к числовой форме используется оператор float.

Хуже всего символьный процессор Mathcad решает тригонометрические уравнения. Как известно, большинство таких уравнений имеет бесконечное множество корней, и описываются они при помощи специальных выражений, содержащих некоторый целочисленный параметр. Например, решение уравнения sin(x)=0 запишется как $x=\pi\cdot N$, $N\in R$ (где R — множество целых чисел). Mathcad же находит корни только на промежутке одного периода соответствующей уравнению тригонометрической функции. Естественно, удовлетворительным такое решение считать вряд ли возможно. Но в некоторых случаях им все же можно воспользоваться.

Пример 22. Решение тригонометрических уравнений

$$\sin(x)=0 \text{ solve}, x \to 0 \qquad \cos(x)=0 \text{ solve}, x \to \frac{1}{2}\cdot\pi$$

$$\sin(a\cdot x)+\cos(b\cdot x)=0 \text{ solve}, x \to \frac{-1}{2}\cdot\frac{\pi}{a-b}$$

Главная проблема, связанная с решением тригонометрических уравнений в Mathcad, заключается отнюдь не в том, что система находит лишь один корень из бесконечного множества. Она связана даже не с тем, что ответ зачастую выдается в виде огромного выражения или содержит специальные функции. Все гораздо хуже: решая тригонометрические уравнения, Mathcad нередко ошибается. Особенно вероятна ошибка при наличии параметров и разнородных функций.

Пример 23. Неверное аналитическое решение уравнения

$$\sin(x)^3+\cos(a\cdot x)^3=1 \left|\begin{array}{l}\text{solve}, x\\ \text{float}, 10\end{array}\right. \to \begin{pmatrix} .9168683843 \\ -.3269639712+.6736886743\cdot i \\ -.3269639712-.6736886743\cdot i \end{pmatrix}$$

Проверяем верность решения, передавая полученные значения корней соответствующей уравнению функции. Если они были найдены правильно, значение функции должно быть равно 0:

$$f(x,a):=\sin(x)^3+\cos(a\cdot x)^3-1$$

$$f(.9168683843,1)=-0.275$$

$$f(-.3269639712+.6736886743\cdot i,2)=-1.991+7.398i$$

Функция не равна 0 даже приблизительно. Вывод: корни были определены неверно.

Для того чтобы убедится, что в приведенном выше примере уравнение было решено неверно, совсем необязательно было создавать соответствующую уравнению функцию. Достаточно было обратить внимание на то, что параметр a не входит в выражения ответа. То же, что корни должны зависеть от параметра, очевидно. Вообще же автор рекомендует вам воздержаться от символьного решения тригонометрических уравнений напрямую. Это одна из тех интеллектуально нагруженных задач, с которыми компьютеры справляются плохо. Если же вы все-таки используете оператор solve для решения тригонометрического уравнения, то обязательно проверяйте ответ так, как мы это сделали выше (а еще лучше строить график).

То, что Mathcad не силен в решении тригонометрических уравнений — это печальная реальность. Но это не значит, что такие уравнения придется решать на бумаге. Конечно, в одно действие и полностью отключив голову, тригонометрическое уравнение в Mathcad вы вряд ли решите. Но если принять деятельное участие в процессе решения, разрабатывая стратегию самостоятельно и доверяя Mathcad лишь вычислительную часть работы, то с самыми сложными уравнениями удастся совладать с гораздо меньшими усилиями, чем при проведении всех операций на бумаге. Основная идея следующая: используя Mathcad, сводим преобразованиями разного рода сложное уравнение к элементарному вроде cos(x)=0, а затем уже без участия программы самостоятельно решаем его. То, как это делается на практике, показано в примере 24.

Пример 24. Поэтапное решение тригонометрических уравнений

Задача 1. Решить уравнение вида:

$$\sin^6(2t)+\cos^6(2t)-\frac{3}{2}\cdot\left(\sin^4(2t)+\cos^4(2t)\right)+\frac{1}{2}\cdot(\sin(t)+\cos(t))=0$$

Данное уравнение содержит функции от 2t и t. Нужно перейти к функциям одного аргумента, а затем упростить полученное выражение. Одновременно обе эти операции выполнит оператор simplify:

$$E := \sin(2t)^6 + \cos(2t)^6 - \frac{3}{2}\cdot\left(\sin(2t)^4 + \cos(2t)^4\right) + \frac{1}{2}\cdot(\sin(t) + \cos(t))$$

$$E \text{ simplify } \rightarrow \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sin(t) + \frac{1}{2}\cdot\cos(t)$$

Мы получили очень простое уравнение, которое далее нужно решать самостоятельно. Для начала сократим 1/2, после чего перенесем единицу вправо:

$$\sin(t) + \cos(t) = 1$$

Возведем обе части уравнения в квадрат и воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$1 + 2\cdot\sin(t)\cdot\cos(t) = 1$$

Сократим единицы и используем формулу для синуса двойного аргумента:

$$\sin(2t) = 0$$

Так как синус равен нулю в точках $\pi\cdot k$ (k — любое целое число), то решением уравнения будет $t=(\pi\cdot k)/2$.

Задача 2. Решить уравнение вида:

$$\sqrt{3}\cdot\sin(t) = \sqrt{2\cdot\sin(t)^2 - \sin(2t) + 3\cdot\cos(t)^2}$$

Первым нашим шагом будет то, что мы функции двойного аргумента представим через функции одинарного аргумента. Сделать это можно, задействовав оператор simplify:

$$E := \sqrt{3}\cdot\sin(t) - \sqrt{2\cdot\sin(t)^2 - \sin(2t) + 3\cdot\cos(t)^2}$$

$$E := E \text{ simplify } \rightarrow 3^{\frac{1}{2}}\cdot\sin(t) - \left(-2\cdot\sin(t)\cdot\cos(t) + \cos(t)^2 + 2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Чтобы в уравнение входили лишь функции одного типа, заменим косинусы выражением, содержащим только синус:

$$E := E \text{ substitute}, \cos(t) = \sqrt{1 - \sin(t)^2} \rightarrow 3^{\frac{1}{2}}\cdot\sin(t) - \left[-2\cdot\left(1 - \sin(t)^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\sin(t) + 3 - \sin(t)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Mathcad плохо решает тригонометрические уравнения. А вот с алгебраическими программа справляется очень хорошо. Отсюда вытекает следующая стратегия: решаем полученное уравнение как алгебраическое относительно sin(t). При этом мы узнаем, какие значения принимает синус. А уж самостоятельно справиться с системой уравнений типа sin(t)=y не составит труда.

$$E \text{ solve}, \sin(t) \rightarrow \frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}}$$

Нам повезло. Уравнение имеет только одно решение. Значит, осталось только интерпретировать полученный результат. Сделав это, получим следующий ответ: $t1=\pi/4+2\cdot\pi\cdot k$ и $t2=3\cdot\pi/4+2\cdot\pi\cdot k$ (k — любое целое число).

Иногда помощь символьному процессору Mathcad нужно оказывать и при решении алгебраических, показательных и логарифмических уравнений. Если система не справится с задачей, преобразованиями и заменами, нужно постараться свести выражение к тождественному, но более простому. Например, если в уравнение входят неизвестные в дробной степени, следует подобрать такую замену, чтобы иррациональность исчезла (Mathcad очень "не любит" иррациональные выражения). Если программа не способна решить показательное уравнение, его левую и правую части стоит прологарифмировать. Зачастую отличный эффект дает банальное упрощение выражения уравнения при помощи оператора simplify с указанием области изменения переменной посредством оператора assume. В общем, различных приемов можно придумать очень много. Главное — сразу не сдаваться, если оператор solve не сможет найти корни уравнения. Помогая программе, направляя ее, вы сможете решить 99% уравнений, которые имеют аналитическое решение.

Пример 25. Поэтапное решение алгебраических и показательных уравнений

Задача 1. Решить алгебраическое уравнение вида:

$$8.4\cdot\sqrt[12]{x^{-7}} - 0.2\cdot\sqrt[4]{x^{-1}\cdot\sqrt[3]{x^{2}}} = \sqrt[12]{x^{11}}$$

Если мы попытаемся решить данное уравнение, не проводя никаких преобразований, то аналитического ответа программа найти не сможет. На это есть две причины. Во-первых, в качестве множителей в левой части уравнения выступают десятичные дроби. Символьный процессор плохо оперирует такими числами. Поэтому десятичные дроби нужно перевести в обыкновенные. Сделать это позволяет оператор factor. Во-вторых, выражение уравнения слишком сложно. Его необходимо упростить, задействовав оператор simplify. Чтобы упрощение было эффективным, нужно указать область изменения x (по умолчанию система считает все неизвестные комплексными величинами). Так как в уравнении несколько раз вычисляются корни четной степени из x в нечетной степени, то, следовательно, x не может быть отрицательной величиной.

$$8.4\cdot\sqrt[12]{x^{-7}} - 0.2\cdot\sqrt[4]{x^{-1}\cdot\sqrt[3]{x^{2}}} - \sqrt[12]{x^{11}} \;\left|\begin{array}{l}\text{factor}\\ \text{assume}, x>0\\ \text{simplify}\end{array}\right. \rightarrow \frac{-1}{5}\cdot\frac{-42 + x^{\frac{1}{2}} + 5\cdot x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{7}{12}}}$$

Полученное в результате проведенных преобразований уравнение Mathcad решит без проблем:

$$\frac{-1}{5}\cdot\frac{-42 + x^{\frac{1}{2}} + 5\cdot x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{7}{12}}} \text{ solve}, x \rightarrow 4$$

Задача 2. Решить алгебраическое уравнение вида:

$$5\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[5]{x}} + 3\cdot\sqrt[5]{x\cdot\sqrt[3]{x}} = 8$$

Если попробовать решить данное уравнение напрямую, то Mathcad сможет найти пять корней, четыре из которых комплексные и только один — действительный:

$$5\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[5]{x}}+3\cdot\sqrt[5]{x\cdot\sqrt[3]{x}}=8\ \left|\begin{array}{l}\text{solve}, x\\ \text{float}, 5\end{array}\right. \rightarrow \begin{pmatrix}1.\\ -2.0657+5.4484\cdot i\\ 2.0657-5.4484\cdot i\\ -2.0657-5.4484\cdot i\\ 2.0657+5.4484\cdot i\end{pmatrix}$$

Однако проверка показывает, что найденное Mathcad решение верно лишь для корня x=1. Комплексные же корни определены неправильно, в чем можно легко убедиться, выполнив подстановку:

$$5\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[5]{x}}+3\cdot\sqrt[5]{x\cdot\sqrt[3]{x}}\ \left|\begin{array}{l}\text{substitute}, x=\frac{512}{78125}\cdot\left(-20+10\cdot i\cdot 6^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{788}{5}+\frac{26}{5}\cdot i\cdot 6^{\frac{1}{2}}\right)\\ \text{float}, 3\end{array}\right. \rightarrow 13.5+6.23\cdot i$$

Проверка по графику показывает, что x=1 — это не единственный корень уравнения (о том, как построить график в Mathcad, читайте в разделе 1.4. Также корнем, вероятно, является x=−1 (рис. 1).

$$f(x) := 5\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[5]{x}}+3\cdot\sqrt[5]{x\cdot\sqrt[3]{x}}-8$$

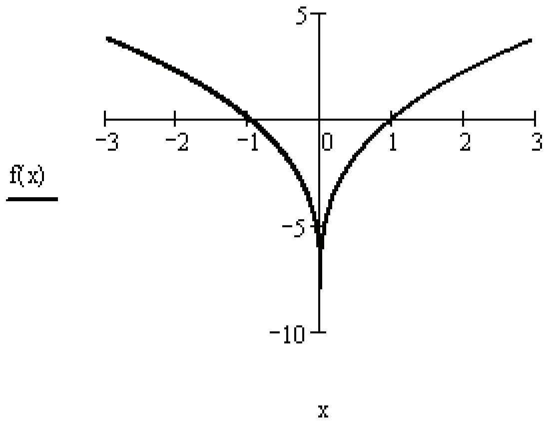

Рис. 1. Соответствующая уравнению функция четная (то есть ее участок правее оси Y является зеркальным отображением участка, лежащего левее данной оси). Это означает, что у корня x=1 будет парный корень x=−1

Можно ли преобразовать решаемое уравнение так, чтобы символьный процессор с ним справился? Сложность данного уравнения заключается в его иррациональности. Mathcad довольно плохо оперирует с выражениями, содержащими корни и дробные степени, поэтому от них нужно стремиться избавляться. Для этого нужно найти такую замену, которая сделала бы иррациональное выражение рациональным (или хотя бы упростила его). В нашем случае хорошей заменой будет $x=t^{15/2}$.

$$5\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[5]{x}}+3\cdot\sqrt[5]{x\cdot\sqrt[3]{x}}-8 \text{ substitute}, x=t^{\frac{15}{2}} \rightarrow 5\cdot\left[\left(t^{\frac{15}{2}}\right)^{\frac{6}{5}}\right]^{\frac{1}{3}}+3\cdot\left[\left(t^{\frac{15}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}\right]^{\frac{1}{5}}-8$$

Полученное в результате замены выражение следует упростить “вручную”, так как оператор simplify (даже в сочетании с assume) с этой задачей не справится (вероятно, из-за слишком большого количества степеней).

$$\frac{15}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{3}\rightarrow 3 \qquad \frac{15}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{5}\rightarrow 2$$

$$5\cdot t^3+3\cdot t^2=8$$

В результате замены мы получили простое алгебраическое уравнение третьей степени, которое Mathcad легко решит.

$$5\cdot t^3+3\cdot t^2=8 \text{ solve}, t \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-4}{5}+\frac{2}{5}\cdot i\cdot 6^{\frac{1}{2}} \\ \frac{-4}{5}-\frac{2}{5}\cdot i\cdot 6^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

Ограничившись действительным корнем, находим, при каких x переменная t принимает значение 1.

$$x^{\frac{2}{15}}=1 \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Найденные корни соответствуют правильному решению уравнения.

Задача 3. Решить показательное уравнение следующего вида:

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x+1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x-1}=\frac{4}{2-\sqrt{3}}$$

Оператор solve способен решить данное уравнение, но лишь приблизительно (корни выдаются в виде десятичных дробей):

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x+1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x-1}=\frac{4}{2-\sqrt{3}} \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 1. \\ 1. \end{pmatrix}$$

То, что оператор solve определил корень только приблизительно — это не беда, так как он имеет целочисленное значение. Хуже другое. Проверка по графику показывает, что у уравнения должно быть три корня, а не один (рис. 2).

$$f(x) := \left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x+1} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x-1} - \frac{4}{2-\sqrt{3}}$$

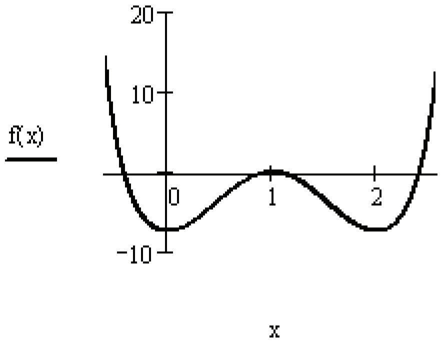

Рис. 2. Кривая дважды пересекает ось X, а в точке x=1 касается ее. Таким образом, у уравнения будет три корня. Так как кривая симметрична относительно прямой x=1, два корня будут сопряжены и иметь вид 1+a и 1–a, где a — некоторое число

Чтобы упростить уравнение, используем тот факт, что подстепенные выражения в нем являются сопряженными и поэтому их перемножение даст целое число:

$$\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)\ \text{expand} \rightarrow 1$$

Отсюда:

$$2-\sqrt{3} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

Используя данное равенство, преобразуем уравнение так, чтобы в нем был только один вид подстепенного выражения. Упрощенное таким образом уравнение оператор solve без проблем решит:

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x+1} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x-1} = \frac{4}{2-\sqrt{3}} \left|\begin{array}{l} \text{substitute}, 2-\sqrt{3} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} \\ \text{solve}, x \\ \text{simplify} \end{array}\right. \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2^{\frac{1}{2}}+1 \\ 1-2^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

При помощи символьного процессора Mathcad можно получить аналитическое решение систем уравнений.

При решении систем уравнений в Mathcad мы будем оперировать такими понятиями, как матрица и вектор. Поскольку матрицы изучаются в курсе линейной алгебры в вузах, мы лишь кратко поясним, что это такое и как можно задать матрицу в Mathcad.

Матрицей называется система m×n элементов, расположенных в прямоугольной таблице, состоящей из m строк и n столбцов. Элементами матрицы могут быть числа, алгебраические или символьные выражения:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3^9+\pi & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ e^2 & \log(7) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a^2+b^2 & |a-b| \\ \sqrt[3]{a\cdot b} & b^a \end{pmatrix}$$

Матрица, состоящая из одной строки, называется матрицей-строкой, а состоящая из одного столбца — матрицей-столбцом или вектором. Если матрица содержит одинаковое число строк и столбцов, она называется квадратной.

Чтобы задать матрицу, нажмите на панели Math (Математические) кнопку с изображением квадратной матрицы с маркерами вместо элементов. Так вы откроете панель Matrix (Матричные). Нажав на ней такую же кнопку, вызовите окно Insert Matrix (Вставить матрицу) (также это окно можно вызвать сочетанием клавиш <Ctrl>+M). Определите размеры создаваемой матрицы в полях Rows (Строки) и Columns (Колонки) и нажмите OK (так, например, если нужно задать вектор из двух элементов, в полях Rows и Columns, нужно указать 2 и 1 соответственно). При этом в документ будет вставлена заготовка с черными маркерами вместо элементов. Последовательно перемещая курсор при помощи мыши или клавиш движения, введите в маркеры нужные значения или выражения.

Итак, разобравшись с тем, что такое матрицы и векторы, вернемся к системам уравнений. Решить систему уравнений в Mathcad можно двумя способами. Во-первых, можно воспользоваться оператором solve (решить) панели Symbolic. В этом случае система должна быть внесена в его левый маркер в виде вектора. Переменные, значение которых должно быть найдено, следует ввести через запятую в правый маркер оператора solve. Ответ будет возвращен в виде матрицы, в строках которой будут записаны корни найденных решений. Их порядок будет таким же, каким был порядок соответствующих переменных в правом маркере оператора solve.

Пример 26. Решение систем уравнений при помощи оператора solve

Чтобы задать систему уравнений, вводим заготовку для вектора (в окошке Insert Matrix (Вставить матрицу) указываем 4 (2) строки и 1 столбец), а затем в маркерах прописываем сами уравнения. В качестве знака равенства используйте логическое равенство <Ctrl>+=.

$$\begin{pmatrix} x+y+z+p=10 \\ x-y-z-p=-8 \\ x+y-z+p=4 \\ -x-y+z+p=4 \end{pmatrix} \text{solve}, x, y, z, p \rightarrow (1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4)$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt[4]{u+v}-\sqrt[4]{u-v}=2 \\ \sqrt{u+v}-\sqrt{u-v}=8 \end{pmatrix} \text{solve}, u, v \rightarrow (41 \;\; 40)$$

Во-вторых, можно использовать так называемый вычислительный блок. Вычислительным блоком в Mathcad мы будем называть систему из вводного слова Given (Дано) и функции решения систем уравнений Find.

Для того чтобы решить систему уравнений при помощи вычислительного блока, выполните следующую последовательность действий.

1. Наберите вводное слово Given.
2. Строго под вводным словом задайте систему уравнений. Делается это в отличие от случая использования оператора solve точно так же, как и при ее решении на бумаге. В качестве знаков равенства следует использовать логическое равенство (Bold Equal — <Ctrl>+=).

3. Наберите функцию решения систем уравнений find(x1,x2,…). В скобках через запятую задайте переменные в том порядке, в котором должны быть расположены в ответе соответствующие им корни.
4. В качестве оператора вывода результата работы функции find(x1,x2,…) используйте оператор символьного вывода.

Пример 27. Решение системы уравнений при помощи вычислительного блока

GIVEN

$$\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}=3 \qquad \sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}=5 \qquad \sqrt{z+x}+\sqrt{x+y}=4$$

$$\mathrm{find}(x,y,z)\rightarrow\begin{pmatrix}3\\-2\\6\end{pmatrix}$$

Существенных различий между решением системы уравнений при помощи оператора solve и вычислительного блока Given-Find нет. Однако есть небольшая, но совсем неочевидная разница в форме представления результата. Она заключается в том, что значения корней, относящиеся к одному решению, в случае использования вычислительного блока располагаются в столбцах, а при применении оператора solve — в строках матрицы ответа. Если этого не знать, то можно очень легко запутаться и сделать ошибку (особенно если число решений и переменных совпадает).

Пример 28. Различия в форме ответа при использовании оператора solve и вычислительного блока

Решаем систему с использованием оператора solve:

$$\begin{pmatrix}x+y=1\\3x^2-2+y=0\end{pmatrix}\mathrm{solve},x,y\rightarrow\begin{pmatrix}\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\cdot13^{\frac{1}{2}} & \frac{5}{6}+\frac{1}{6}\cdot13^{\frac{1}{2}}\\ \frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot13^{\frac{1}{2}} & \frac{5}{6}-\frac{1}{6}\cdot13^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}$$

Решаем систему при помощи блока Given-Find:

Given

$$x+y=1 \qquad 3x^2-2+y=0$$

$$\mathrm{find}(x,y)\rightarrow\begin{pmatrix}\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\cdot\sqrt{13} & \frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\sqrt{13}\\ \frac{5}{6}+\frac{1}{6}\cdot\sqrt{13} & \frac{5}{6}-\frac{1}{6}\cdot\sqrt{13}\end{pmatrix}$$

Mathcad может решать самые разнообразные системы. Лучше всего решаются системы алгебраических уравнений, хуже всего — системы, содержащие сильно разнородные по своей природе функции (например, экспоненту и синус). Неплохо справляется Mathcad и с системами алгебраических уравнений с параметрами. В общем же трудности, которые связаны с видом уравнений при решении систем, очень схожи с аналогичными проблемами при поиске корней одного уравнения, о которых весьма подробно говорилось в начале раздела, поэтому останавливаться на этом вопросе не будем. Приведем лишь несколько примеров решения в Mathcad систем различных типов.

Пример 29. Аналитическое решение систем нелинейных уравнений различных типов

Система алгебраических уравнений с параметрами:

$$\begin{bmatrix} x + y + z = 0 \\ c\cdot x + a\cdot y + b\cdot z = 0 \\ (x+b)^2 + (y+c)^2 + (z+a)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \end{bmatrix} \text{solve}, x, y, z \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -b+a & -c+b & c-a \end{pmatrix}$$

Система логарифмических уравнений:

$$\begin{bmatrix} \log\left[\sqrt{(x+y)^2}\right] = 1 \\ \log(y) - \log(|x|) = \log(2) \end{bmatrix} \text{solve}, x, y \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{10}{3} & \frac{20}{3} \\ -10 & 20 \end{pmatrix}$$

Система тригонометрических уравнений:

$$\begin{pmatrix} \cos(x)^2 + \cos(y)^2 = \frac{1}{4} \\ x + y = \frac{5\pi}{6} \end{pmatrix} \text{solve}, x, y \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\cdot\pi & \frac{1}{2}\cdot\pi \\ \frac{4}{3}\cdot\pi & \frac{-1}{2}\cdot\pi \\ \frac{1}{2}\cdot\pi & \frac{1}{3}\cdot\pi \\ \frac{3}{2}\cdot\pi & \frac{-2}{3}\cdot\pi \end{pmatrix}$$